

教学设计 5

章节名称	8.2 欧拉图与哈密尔顿图	本节内容	欧拉图及其应用
所需课时	1 课时	所属课程	离散结构
总学时	64 课时	授课对象	网络工程专业 大二学生
教育理念	<p>教学中坚持“学生中心、能力导向、素养提升”的教学理念，依据本课程的教学目标，结合本课程教学内容的特点，在教学方法上总体采用“提出问题→分析问题→解决问题”的教学思路，其中提出问题阶段需要寻找与课程内容相符合的教学案例，并将思政元素融入教学案例中，进而从知识、能力、情感、价值观等多个维度来教育学生。</p>		
教材分析	<p>本课程所使用的教材是由我系教师所组成的教学团队编写的教材《离散数学及其应用》，其中本节课所讲内容为书中特殊图中的欧拉图的相关知识。</p> <p>在我们日常生活以及其他专业课的学习中，经常会遇到一些线路问题，比如从某地出发经过所有的街道后又回到出发点，要求找出权值最小的一条路径，类似这样的问题我们该如何求解呢，这就是本节课欧拉图所要学习的内容。本节课通过一个具体案例“特克斯城消毒”问题，使学生了解本节课学习的目的进而引导学生学习“欧拉图”的相关知识，并学习“奇偶点图上作业法”。此外通过向学生展示特克斯城这座世界上唯一没有红绿灯的城市，让学生了解这座城的由来及风土人情，引导学生追忆红色历史，传播红色基因。</p>		

<p style="text-align: center;">学情分析</p>	<p>知识分析：本节课的学习内容为“欧拉图”，就本节课内容来说具有很强的实用性，学生可以使用欧拉图的理论知识解决具体的线路问题，因此在内容设置上首先引出一个“特克斯城消毒”问题，然后通过学习相关的理论知识来解决这个问题，从而培养学生各方面的能力。</p> <p>能力分析：通过前几节课的学习，学生对于图问题的处理已经具备了基本的能力。</p> <p>心理分析：上节课学生已经学习了图的匹配问题，通过匹配内容的学习和匹配的具体应用，学生已经感受到了图的理论知识在实际生活中的应用，因此学生应该对本节课“欧拉图”理论内容的学习充满兴趣，而且学生应该对“欧拉图”的实际应用充满期待。</p>				
<p style="text-align: center;">教 学 目 标</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td data-bbox="301 1046 419 1379" style="text-align: center; vertical-align: middle;">知 识 目 标</td> <td data-bbox="419 1046 1471 1379"> <ol style="list-style-type: none"> 1. 能够通过欧拉图、半欧拉图概念的学习识别出给定的图是否是一个欧拉图或半欧拉图。 2. 能够通过欧拉图、半欧拉图的判定定理快速判断出给定的图是欧拉图还是半欧拉图。 </td> </tr> <tr> <td data-bbox="301 1379 419 1888" style="text-align: center; vertical-align: middle;">能 力 目 标</td> <td data-bbox="419 1379 1471 1888"> <ol style="list-style-type: none"> 1. 学生能够判断出一个实际问题是否可以使用欧拉图的理论知识来解决，培养学生的举一反三能力。 2. 通过学习奇偶点图上作业法，培养学生的计算思维能力。 3. 学生能够使用欧拉图的判定定理和奇偶点图上作业法解决实际的问题，从而培养学生分析问题的能力和创新能力。 </td> </tr> </table>	知 识 目 标	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能够通过欧拉图、半欧拉图概念的学习识别出给定的图是否是一个欧拉图或半欧拉图。 2. 能够通过欧拉图、半欧拉图的判定定理快速判断出给定的图是欧拉图还是半欧拉图。 	能 力 目 标	<ol style="list-style-type: none"> 1. 学生能够判断出一个实际问题是否可以使用欧拉图的理论知识来解决，培养学生的举一反三能力。 2. 通过学习奇偶点图上作业法，培养学生的计算思维能力。 3. 学生能够使用欧拉图的判定定理和奇偶点图上作业法解决实际的问题，从而培养学生分析问题的能力和创新能力。
知 识 目 标	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能够通过欧拉图、半欧拉图概念的学习识别出给定的图是否是一个欧拉图或半欧拉图。 2. 能够通过欧拉图、半欧拉图的判定定理快速判断出给定的图是欧拉图还是半欧拉图。 				
能 力 目 标	<ol style="list-style-type: none"> 1. 学生能够判断出一个实际问题是否可以使用欧拉图的理论知识来解决，培养学生的举一反三能力。 2. 通过学习奇偶点图上作业法，培养学生的计算思维能力。 3. 学生能够使用欧拉图的判定定理和奇偶点图上作业法解决实际的问题，从而培养学生分析问题的能力和创新能力。 				

	4. 通过小组讨论和课后阅读，提高学生的交流能力和自学能力。
素质目标	<p>1. 通过向学生介绍特克斯城这座世界上唯一没有红绿灯的“八卦城”，引导学生学习这座城市的历史，这座城市的布局充分体现了《易经》的文化内涵和八卦奥秘，让学生体会我们中华文化的博大精深。</p> <p>2. 引导学生学习科学家欧拉一生孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德。</p>
教学重点	<p>教学重点：</p> <p>1. 欧拉图判定定理</p> <p>2. 半欧拉图判定定理</p> <p>处理方式：通过具体的无向图和有向图来引导学生学习相应的定理。</p>
教学难点	<p>教学难点：奇偶点图上作业法</p> <p>处理方式：在欧拉图判定定理的基础上，通过具体的案例来学习奇偶点图上作业法。</p>
教学方法	<p>案例引入法：根据本节课内容，引入“特克斯城消毒问题”，激发学生的学习兴趣。</p> <p>问答法：对于欧拉图和半欧拉图的识别，采用提问的方式进行。</p> <p>课堂练习法：通过课堂练习，检查学生对本节课相应知识的掌握情况。</p> <p>小组讨论法：对于“特克斯城消毒问题”，引导学生以小组为单位进行讨论。</p>

<p>教学过程 总体思路</p>	
<p>教学过程 具体安排</p>	<p>教学过程具体安排详见“教学过程安排表”</p>
<p>板书设计</p>	
<p>课程资源</p>	<p>本节课内容所包含的课程资源如下：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 超星学习通平台中的视频资源、测试题、知识拓展模块中的相关知识。 2. 教师提供的有关本节课内容的参考文献资料。 3. 教师讲课所用的课件。
<p>教学评价</p>	<p>通过以下几个方面检查学生对本节课内容的掌握情况：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 学生回答问题的情况。 2. 课堂练习情况及课后作业完成情况。 3. 超星学习通平台相应章节测试题的完成情况。

教学过程安排表

教 学 过 程 安 排	1.知识回顾 (2分钟)	
	回顾上节课所讲的主要内容：通路、回路的概念。	
	2. 新课主要内容及时间分配：	
	(1) 教学引入 (2分钟)	
	(2) 欧拉图和半欧拉图的概念 (10分钟)	
(3) 欧拉图和半欧拉图的判定 (15分钟)		
(有向图、无向图)		
(4) 欧拉图的应用 (20分钟)		
(奇偶点图上作业算法)		
(5) 本课小结及反思 (1分钟)		
教学环节一：教学引入 (2分钟)		
	主要内容	教学活动
	<p>特克斯是位于新疆伊犁的一座小县城，对很多人而言，或许特克斯这个地方听起来还很陌生，但它却有一个牛气哄哄的称号——世界最大八卦城。有传言说，这座八卦城的设计者是自称全真七子之一的丘处机，虽纯属子虚乌有，但这座城确实充满了《易经》的韵味。八卦城有8条主要干道如图1所示，街道的路灯颜色各不相同，据说是根据无形来定色的，而名字分别对应“乾坎艮震巽离坤兑”。现将特克斯城布局抽象成如图2所示的无向图，为了抗疫的需要现要对图2中红色街道进行消毒工作，思考：消毒工人如果从A点出发逐街消毒，并最终回到A点，为提高工</p>	<p>教师活动： 给学生介绍特克斯这座没有红绿灯的城市，并提出问题鼓励学生积极思考，自由讨论。</p> <p>学生活动： 学生欣赏这座城市的美以及思考教师提出的问题。</p>

作效率并减少人力物力的投入,大家能否帮助消毒工人设计一条路线,使得消毒工人走过的路线所对权值之和最小并且完成了所有街道的消毒工作?这条最优路径是什么权值之和为多少? (停顿几秒)



图 1

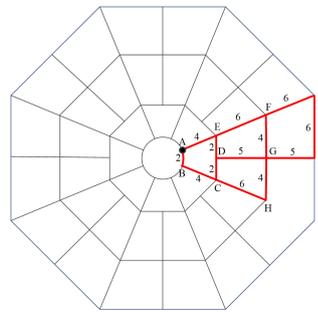


图 2

为了解决这样问题,进而引出本节课所要学习的内容——**欧拉图**。

本环节设计目的

备注

1. 让学生了解特克斯这座城市,体会这座城市独特的文化韵味。
2. 通过讨论提出的问题,激发学生对本节课内容的学习兴趣。

提升兴趣

教学环节二：欧拉图和半欧拉图的概念（10分钟）

主要内容

教学活动

1. 研究背景

(1) 哥尼斯堡七桥问题（此问题通过视频展示）

18世纪东普鲁士的哥尼斯堡城,有一条河穿过,河上有两个小岛,有七座桥把两个岛与河岸联系起来(如图3所示)。有人提出一个问题:一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥,最后回到出发点。后来大数学家欧拉把它转化成几何问题

教师活动:

1. 通过视频让学生了解哥尼斯堡七桥问题,并介绍伟大数学家欧拉一生的贡献。
2. 讲解欧拉通路、半欧拉通路、欧拉图、半欧拉图的概念,让学生思考例1,找学

(如图 4 所示) ——一笔画问题。



图 3

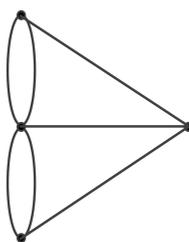


图 4

(2) 数学家欧拉简介



莱昂哈德·欧拉，瑞士数学家、自然科学家。1707 年 4 月 15 日出生于瑞士的巴塞尔，1783 年 9 月 18 日于俄国圣彼得堡去世。欧拉渊博的知识，

无穷无尽的创作精力和空前丰富的著作，都是令人惊叹不已的！他从 19 岁开始发表论文，直到 76 岁，半个多世纪写下了浩如烟海的书籍和论文。到今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字。

2. 欧拉图与半欧拉图概念

欧拉通路：经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路。

欧拉回路：经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路。

欧拉图：具有欧拉回路的图。

半欧拉图：具有欧拉通路而无欧拉回路的图。

注意：平凡图为欧拉图。

例 1：根据定义判断图 5 中哪些是欧拉图，哪些是半欧拉图？

生回答。

学生活动：

1. 思考哥尼斯堡七桥问题。体会数学家欧拉的伟大以及为科学做出的贡献。
2. 学习相关定义，并回答教师问题。

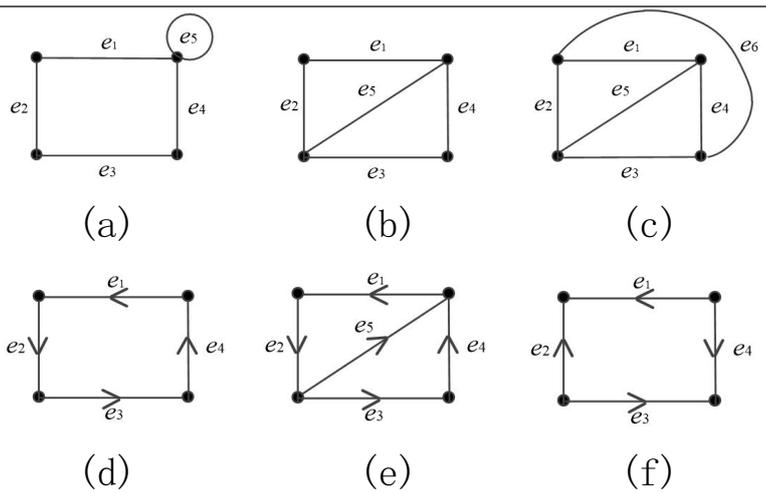


图 5

解：根据欧拉图的定义可知图 5 (a) 和图 5 (d) 为欧拉图。

根据欧拉图的定义可知图 5 (b) 和图 5 (e) 为半欧拉图。

根据欧拉图的定义可知图 5 (c) 和图 5 (f) 既不是欧拉图也不是半欧拉图。

本环节设计目的	备注
<p>1. 让学生学习著名的哥尼斯堡七桥问题，使学生了解欧拉图的历史由来。</p> <p>2. 引导学生学习数学家欧拉一生孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德。</p> <p>3. 通过提问检查学生对欧拉图、半欧拉图概念的理解情况。</p>	知识表达
教学环节三：欧拉图与半欧拉图的判定（15分钟）	
主要内容	教学活动
<p>1. 无向图欧拉图和半欧拉图的判定方法</p> <p>定理 1：无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无</p>	<p>教师活动：</p> <p>1. 和学生互动讲解无向图的欧拉</p>

奇度数顶点。

定理 2: 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 连通且恰有两个奇度数顶点。

例 2: 使用相应的判定定理判断图 6 中的图哪个是欧拉图, 哪个是半欧拉图?

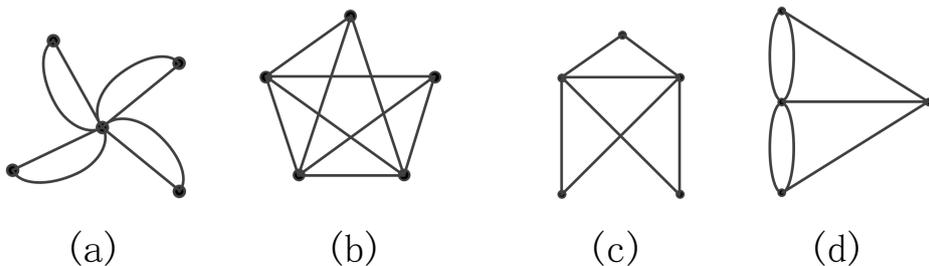


图 6

解: 图 6 中的 4 副图都是连通图。

图 6 (a) 和图 6 (c) 没有奇度数顶点, 因此是欧拉图;

图 6 (b) 有两个奇度数顶点, 因此是半欧拉图;

图 6 (d) 4 个顶点都是奇度数顶点, 因此既不是欧拉图也不是半欧拉图。

2. 无向图欧拉图和半欧拉图的判定方法

定理 3: 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。

定理 4: 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的, 且 D 中恰有两个奇度数顶点, 其中一个的入度比出度大 1, 另一个的出度比入度大 1, 而其余顶点的入度都等于出度。

例 3: 使用相应的判定定理判断图 7 中的图哪个是欧拉图, 哪个是半欧拉图?

图和半欧拉图的判定定理, 找学生回答例 2 中的问题。

2. 和学生互动讲解有向图的欧拉图和半欧拉图的判定定理, 找学生回答例 3 中的问题。

3. 思考课堂练习中的问题, 并要求学生动手画一画。

学生活动:

1. 积极学习相应的判定定理, 并回答教师提出的问题。

2. 积极学习相应的判定定理, 并回答教师提出的问题。

3. 认真完成教师布置的课堂练习。

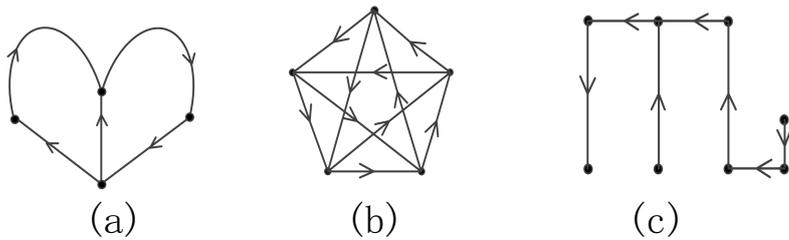


图 7

解：图 7 中的 3 副图中，图 7 (a) 和图 7 (b) 都是强连通图，图 7 (c) 为弱连通图。

图 7 (a) 每个顶点的入度都等于出度，所以是欧拉图。

图 7 (b) 恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大 1，另一个的出度比入度大 1，而其余顶点的入度都等于出度，所以是半欧拉图。

图 7 (c) 既不是欧拉图，也不是半欧拉图。

课堂练习：

练习一：图 8 所示的四连环是否是欧拉图，如果是，试着走一条欧拉回路？

练习二：试想若干年后你带着自己的女儿去方特欢乐谷游玩，该主题公园的游玩项目众多，包括恐龙危机、飞越极限、方特卡通城堡、海螺湾、欢乐天地等等。当你拿到旅游手册时，心想，门票颇贵、项目甚多，若规划不善，很可能只玩几个项目就闭园了。你对女儿说：“闺女，今天我们得用有限的时间观光和体验完沿途的所有风景和项目，中途不许走重复的路，最后回到入口，你觉得我们能做到吗？”。大家试着想一想、画一画。



图 8

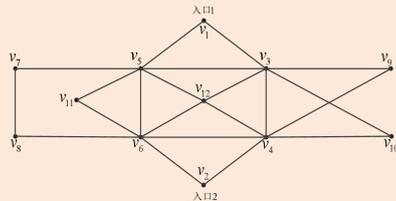


图 9

本环节设计目的	备注
<p>1. 通过提问, 检查学生对无向图和有向图的欧拉图和半欧拉图判定定理的理解情况。</p> <p>2. 通过课堂练习, 检查学生是否能够灵活使用相应的判定定理判断一个图是否是欧拉图, 培养学生的观察能力。</p>	知识提升
教学环节四：欧拉图的应用（20分钟）	
主要内容	教学活动
<p>对于案例中提到“特克斯城消毒问题”如何使用本节课欧拉图的知识解决呢, 下面我们学习一种算法——奇偶点图上作业法。</p> <p>首先明确所求问题是寻找至少包含每条边一次且权重最小的路径。显然, 若该图是欧拉图, 则每一条路径都是最优解; 若该图不是欧拉图, 则必然要重复某些边。对此, 若图的边数为 m, 则所求回路的长度至少为 m, 至多不超过 $2m$, 并且每条边至多出现 2 次。于是可复制其中的某些边, 使每个顶点变成偶度顶点, 然后在所求图中找一条欧拉回路, 只是这里有个约束, 即添加的边的权和应最小, 其中的关键问题是应该复制哪些边。</p>	<p>教师活动:</p> <p>1. 讲解奇偶点图上作业法的基本思想。小组讨论: 从欧拉图的角度思考“特克斯城消毒问题”。</p> <p>2. 引导学生思考以下排列组合问题:</p> <p>①从 n 个点中任取两个, 有多少种取法?</p> <p>②将 $2n$ 个数分成 n 份, 有多少种分法? 将答案发布至超星学习通平台。</p> <p>3. 和学生互动解决“特克斯城消毒问题”。并思考: 对于“特克斯城消毒问题”来说, 如果求出</p>

该算法描述如下：

- (1) 若 G 不含奇度顶点，则任一欧拉回路都是最优解。
- (2) 若 G 含 $2k(k > 0)$ 奇度顶点，则先求出任意两个奇度顶点间的最短路径，共需求 C_{2k}^2 条。
- (3) 在 (2) 中的路径中找出 k 条路径 P_1, P_2, \dots, P_k ，使之满足以下条件：
 - ① 任何 P_i 和 $P_j (i \neq j)$ 没有相同的起点和终点；
 - ② 在满足 ① 的 k 条最短路径的集合中， P_1, P_2, \dots, P_k 的长度之和应最小。
- (4) 根据 (3) 中求出的 k 条路径 P_1, P_2, \dots, P_k ，在图 G 中复制所有出现在这条路径上的边后得到图 G' ，并在图 G' 中寻找欧拉回路即可。

下面我们就用本节课所学的“欧拉图”以及“奇偶点图上作业法”来解决“特克斯城消毒问题”，在求解之前先抽象出图 10 (a) 中所要研究的部分如图 10 (b) 所示。

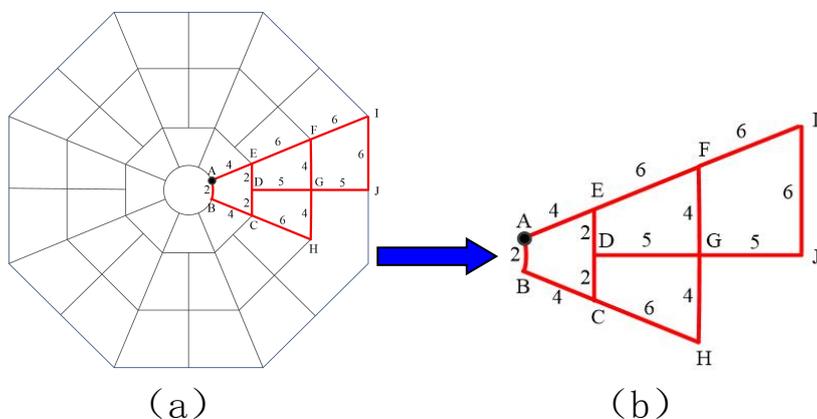


图 10

(1) 根据欧拉图的判定定理，判定图 10 (b) 是否为欧拉图：首先图 10 (b) 为连通图，其次存在奇度数顶点 E, D, C, F ，所以图 10 (b) 不是欧拉图。

(2) 图 10 (b) 中含有 $2k = 4(k = 2)$ 个奇度顶点，

的 $P_1 = I(D,F) = 8$ 则需在图中增加哪些边？

4. 要求学生完成课堂练习，并发布至超星学习通平台。

学生活动：

1. 认真学习奇偶点图上作业法。以小组为单位讨论“特克斯城消毒问题”。

2. 思考相应问题，并将答案传至超星学习通平台。

3. 和教师互动解决“特克斯城消毒问题”。思考并回答教师提出的问题。

4. 完成课堂练习。

因此首先求出其中任意两个奇度顶点之间的最短路径，即需要求出 $C_4^2=6$ 条最短路径，分别为 $L(E,D)$ 、 $L(E,C)$ 、 $L(E,F)$ 、 $L(D,C)$ 、 $L(D,F)$ 、 $L(C,F)$ 这 6 条，通过图 10 (b) 中对应边的权值，可得这 6 条路径的最小值分别为：

$$L(E,D)=2 \quad L(E,C)=4 \quad L(E,F)=6$$

$$L(D,C)=2 \quad L(D,F)=8 \quad L(C,F)=10$$

(3) 在第 (2) 步中找到的 6 条最短路径中，找出 2 条路径 P_1 和 P_2 ，这 2 条路径需要满足：

① P_1 和 P_2 没有相同的起点和终点，这样的组合共有 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2}=3$ 种情况，分别为：

第一种情况： $L(E,D)+L(C,F)=2+10=12$

第二种情况： $L(E,C)+L(D,F)=4+8=12$

第三种情况： $L(D,C)+L(E,F)=2+6=8$

② 在①的三种情况中选出 P_1 和 P_2 相加之和最小的情况，即第三种情况。

(4) 根据第 (3) 步求出的结果为 $P_1=L(D,C)=2$ ， $P_2=L(E,F)=6$ ，在图 10(b) 中复制 P_1 和 P_2 所对应的边，即可将图 10 (b) 转变为一个欧拉图，如图 11 所示。

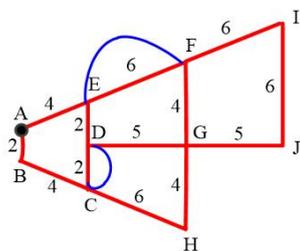


图 11

由上分析可知最优路径为：

$$A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow G \\ \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

其中最优解为最优路径权值之和为 64。

课堂练习：

邮递员装好邮件从邮局 H 出发，行遍其所辖街道，最后再回到邮局。对于该问题，邮递员希望寻找到一条最短路线。观察图 12，试设计一种有效的算法帮邮递员找到最优路径。

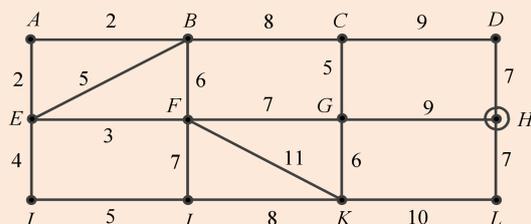


图 12

本环节设计目的		备注
<p>1. 通过提问，检查学生对于排列组合问题的掌握情况，为讲解“奇偶点图上作业法”做铺垫。</p> <p>2. 引导学生学习“奇偶点图上作业法”，并使用此方法以小组为单位讨论“特克斯城消毒问题”，培养学生思考问题的能力、交流能力、解决实际问题的能力。</p> <p>3. 通过课堂练习，培养学生的举一反三的能力。</p>		解决问题的能力
教学环节五：本课小结及反思（1分钟）		
主要内容	设计目的	
<p>本节课主要学习了以下内容：</p> <p>1. 欧拉图、半欧拉图的概念及判定方法。</p> <p>2. 奇偶点图上作业法。</p> <p>希望大家能够将在欧拉图的理论知识应用在具体的问题上，并灵活使用奇偶点图上作业法找到一个普</p>	培养学生的归纳总结能力、举一反三的能力。	

通图所对的欧拉图。

大家思考一下本节课的内容还可以解决哪些实际问题？

课后作业及延伸

主要内容	设计目的
------	------

一、使用本节课所学的方法完成下题。

2022 新年伊始，新冠肺炎不期而至，举国上下，诚惶诚恐，饮食起居，多有不便，然仍有逆行者如志愿者、医生、外卖小哥等充当着社会的流动血液，使疫情快速好转。今有送菜小哥在网上接到订单后需沿街配送，由于他所在接单区域每条街都有很多订单，他需从 A 出发逐街配送并最终回到配送点 A ，配送地图如下图 13 所示，为提高经济性，节约人力和物力，特请你为他规划一条最优路线，以使他走过的路线最短，并给出最短路径。（注：使用奇偶点图上作业法求解）

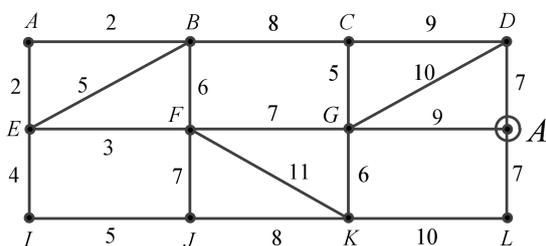


图 13 送菜小哥配送路线图

1. 图 13 中的奇度数顶点有 6 个，对于一个图中很多个奇度数顶点时，如何正确使用“奇偶点图上作业法”求解。从而培养学生的灵活应用能力，举一反三能力。

2. 通过课外阅读给定参考文献，使学生对所学知识内容作延伸，并培养学生的自学能力和创新能力。

二、阅读以下参考文献，并试着分析欧拉图还有哪些实际应用，并对所学知识做延伸。

1. 欧拉图在生活中的应用本科 - 百度文库

(baidu.com)

2. 图论——欧拉图原理及其应用 - 博客园

(cnblogs.com)

3. 欧拉图及其应用 哔哩哔哩 bilibili

4. 一笔画与中国邮递员问题 - 哔哩哔哩

(bilibili.com)