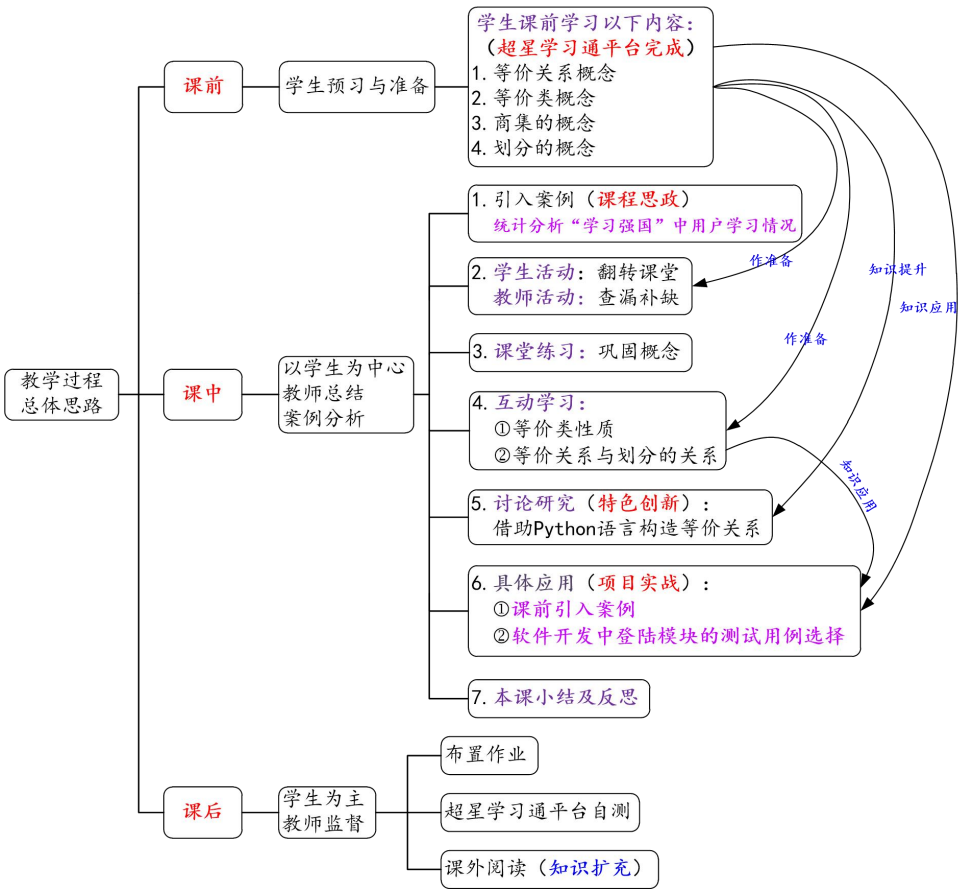
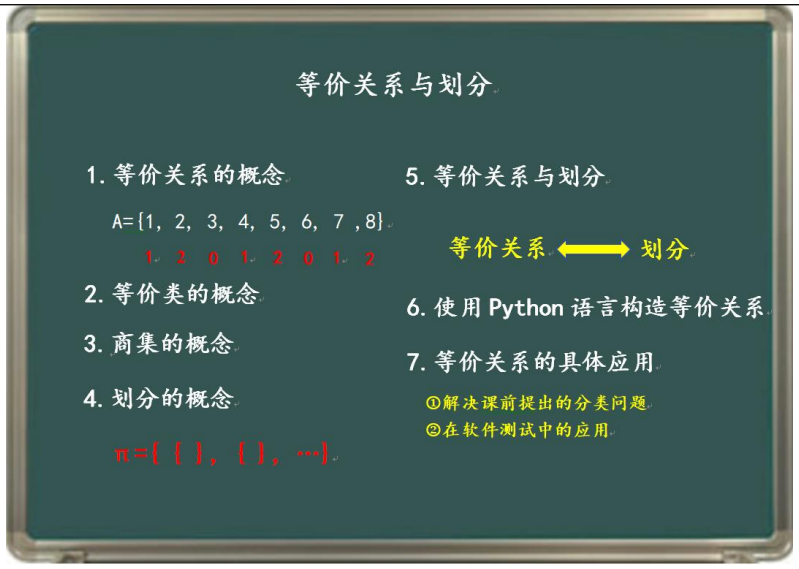
教学设计 2

章节名称	5.6 等价关系与划分	**本节内容**	等价关系与划分
所需课时	1 课时	**所属课程**	离散结构
总学时	64	**授课对象**	网络工程专业 大二学生
教育理念	教学中坚持“学生中心、能力导向、素养提升”的教学理念，依据本课程的教学目标，结合本课程教学内容的特点，在教学方法上总体采用“提出问题→分析问题→解决问题”的教学思路，其中提出问题阶段需要寻找与课程内容相符合的教学案例，并将思政元素融入教学案例中，进而从知识、能力、情感、价值观等多个维度来教育学生。		
教材分析	本课程所使用的教材是由我系教师所组成的教学团队编写的教材《离散数学及其应用》，其中本节课所讲内容为书中等价关系与划分中的相关知识。 等价关系是离散数学中的一种非常重要的概念，在数学中也占有很重的地位，它主要研究元素个体间的同一性问题。如在性别上，可以把人划分成两类：男人和女人。也就是说，在性别上所有的男人都是一样的，所有的女人也是一样的，即在性别上是等价的。借助等价关系可对研究的客体进行分类，对各个部分的研究而达到对整体研究的目的。等价关系在计算机学科以及我们的日常生活中有着广泛的应用，在本部分内容的教学中，通过具体案例“统计分析学习强国中用户学习情况”的问题，		

		引导学生思考我们日常生活中的分类问题，通过案例中提到的“学习强国”平台鼓励学生积极下载并学习其中的资源，引导学生认识我国现有的各种党派，最终引出本节课学习内容——等价关系。
学情分析		**知识分析：**本节课的学习内容为“等价关系与划分”，等价关系在今后的专业课学习和日常生活中都具有很强的实用性，就授课内容而言要掌握的概念较多，其中等价关系的概念需要学生在掌握了上节课关系的性质的基础上进行。 **能力分析：**前面的课程中让学生认识了什么是关系，而且详细讲解了关系的五大性质：自反、反自反、对称、反对称和传递。本节课内容的学习需要学生具备的能力有：对于一个给定的关系 R，学生应该能够快速判断出 R 具有自反、反自反、对称、反对称和传递中的哪些性质。 **心理分析：**前几节课学生学习的都是二元关系的理论内容，等价关系是一种特殊的二元关系，学习等价关系的应用学生应该具有很强的积极性。
教学目标	**知识目标**	1. 学生能够判断出给定的关系是否是等价关系，并能够求出对应的等价类和商集。 2. 学生能够判断出给定的集合是否某个集合的一个划分。 3. 学生能够总结出等价类具有的性质。 4. 学生能够理解等价关系与划分之间的关系。

	能力目标	1. 通过具体案例，让学生感受等价关系在日常生活中是随处可见的，培养学生理论联系实际的能力。 2. 培养学生的知识表达能力、观察问题的能力和归纳总结能力。 3. 培养学生能够使用本节课所学内容去分析和解决实际问题的能力。 4. 引导学生使用 Python 语言代码来构造等价关系，培养学生的计算思维能力、创新能力、动手编程能力。
	素质目标	1. 通过引入案例中提到的“学习强国”平台鼓励学生积极下载并学习其中的资源，并引导学生认识我国现有的各种党派。 2. 在使用本节内容解决具体问题时，要求学生分组进行讨论，学生通过交流弥补自己的不足，从而提升自己的交流能力，体验团队合作的快乐。
教学重点		**教学重点：** 1. 等价类的性质 2. 等价关系与划分之间的关系。 **处理方式：** 1. 通过关系图引导学生观察等价类的性质。 2. 通过使用 Python 语言构造等价关系，来使学生理解等价关系与划分之间的关系。
教学难点		**教学难点：**等价关系的具体应用。 **处理方式：**通过日常生活中的分类问题以及软件测试中测试用例的选择来学习等价关系的具体应用。

教学方法	**案例导入法：**通过引入具体案例，让学生思考分类在生活中的应用。 **翻转课堂法：**由于本节课内容概念偏多，因此需要学生课前预习相关概念，课上上台讲解。 **小组合作探究法：**本节课所讲内容在实际生活和今后的学习中经常会使用，通过软件开发中登陆模块的测试用例的选择，组织学生以小组为单位进行研究，并通过提问的方式检查学生的讨论结果。
教学过程总体思路	
教学过程具体安排	教学过程具体安排详见“教学过程安排表”

板书设计	
课程资源	本节课内容所包含的课程资源如下： 1. 超星学习通平台中的视频资源、测试题、知识拓展模块中的课外实验。 2. 教师提供的有关本节课内容的参考文献资料。 3. 教师讲课所用的课件。 4. 教材。
教学评价	通过以下几个方面检查学生对本节课内容的掌握情况： 1. 学生课堂上回答问题的情况。 2. 学生分小组讨论的情况。 3. 学生课后作业的完成情况。 4. 学生使用 Python 语言求解矩阵运算的情况。 5. 学生通过超星学习通平台完成相应章节测试题的情况。

教学过程安排表

<table>
<tr><td rowspan="4">教学过程安排</td><td colspan="2">1. 知识回顾（2 分钟）</td></tr>
<tr><td colspan="2">回顾上节课所讲的主要内容：关系的自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的判断方法。</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. 新课主要内容、掌握程度及时间分配：</td></tr>
<tr><td colspan="2">（1）课程导入（2 分钟）
（2）学生翻转课堂（15 分钟）
①等价关系的概念②等价类的概念
③商集的概念④划分的概念
（3）课堂练习（5 分钟）
（4）互动学习（10 分钟）
①等价类的性质 ②等价类与划分的关系
（5）讨论研究（5 分钟）
（6）等价关系具体应用（10 分钟）
（7）本课小结及反思（1 分钟）</td></tr>
<tr><td colspan="3">教学环节一：教学引入（2 分钟）</td></tr>
<tr><td colspan="2">主要内容</td><td>教学活动</td></tr>
<tr><td colspan="2">等价关系目前对于大家来说比较陌生，但是等价关系却在我们日常生活中经常用到，比如现要分析和统计“学习强国”中的用户在平台中的学习情况，表 1 为从平台中截取到的部分用户的基本信息，大家想一下能够对用户进行怎样的分类进而统计出不同类用户的基本学习情况？（停顿几秒）</td><td>教师活动：
1. 分析引入的案例中的问题，和学生一起讨论。
2. 向学生介绍“学习强国”平台以及让学生认识</td></tr>
</table>

表 1 “学习强国”导出基本信息

姓名	性别	年龄	党派	职业
王吉荣 1	女	50	中国共产党	高校教师
张祥德 2	男	28	九三学社	工程师
王生安 3	男	34	中国共产党	高校教师
刘　玉 4	女	26	中国农工民主党	高校教师
华璐玉 5	女	38	中国民主同盟	工程师
古军同 6	男	57	中国民主同盟	设计师
林必力 7	女	25	九三学社	设计师

通过观察表 1 中用户的基本信息，我们可以从性别、年龄、党派、职业四个方面进行分类，从而分析在不同分类下用户学习平台中资源的情况。其实等价关系就是在某种条件下的分类，本节课我们就来一起学习**等价关系**。

我国不同的党派，进而进行课程思政。

学生活动：

1. 和教师一起分析案例。
2. 了解“学习强国”平台，并认识我国各大党派。

本环节设计目的

1. 通过案例使学生了解“学习强国”平台，并鼓励学生学习平台中的内容。

2. 通过向学生介绍我国不同的党派，让学生了解我国目前的执政党是中国共产党，参政党有 8 个，感兴趣的同学可以课后学习。

3. 通过案例引出使用分类的方法解决问题，为本节课内容的学习做铺垫。

备 注

提升兴趣

教学环节二：学生翻转课堂（15 分钟）	
主要内容	**教学活动**
1. 等价关系的概念 设 R 为非空集合上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系，若 $\langle x,y\rangle \in R$，称 x 等价于 y，记做 $x \sim y$。 **例 1：**设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，如下定义 A 上的关系 R： $$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$ 其中 $x \equiv y \pmod 3$ 叫做 x 与 y 模 3 相等，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等，求出 R 所对的集合表达式，并判断 R 具有哪些性质。 **解：**分析此道题可以写出满足关系的有序对如下： $\langle 1,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 7,7\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,7\rangle,$ $\langle 7,1\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 7,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 8,8\rangle,$ $\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 5,8\rangle,\langle 8,5\rangle,$ $\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,3\rangle$ 以上有序对组成的集合就是所要求的 R，通过观察发现 R 具有自反性、对称性和传递性，因此 R 是一个等价关系。 R 所对的集合表达式看不出任何规律，为此将以上等价关系的关系图画出，如下图 1 所示：	**学生活动：** 翻转课堂：学生上黑板讲解以下概念： 1. 等价关系的概念。 2. 等价类的概念。 3. 商集的概念。 4. 划分的概念。 **教师活动：** 教师在台下检查学生讲解内容的情况，并记录其中需要补充和完善的内容。 查漏补缺： 待学生讲解完毕，教师进行补充、纠正。

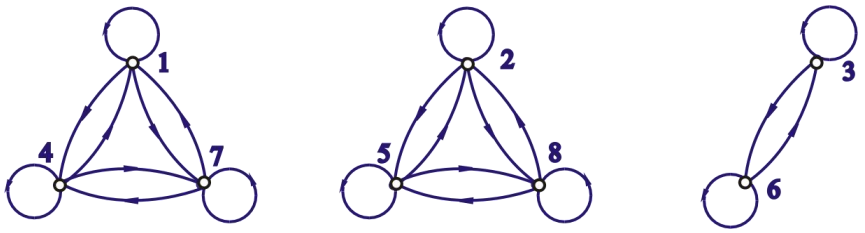


图 1　模 3 等价关系图

2. 等价类的概念

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为[x]。

3. 商集的概念

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集,记做 A/R:

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

4. 划分的概念

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π（$\pi \subseteq P(A)$）满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

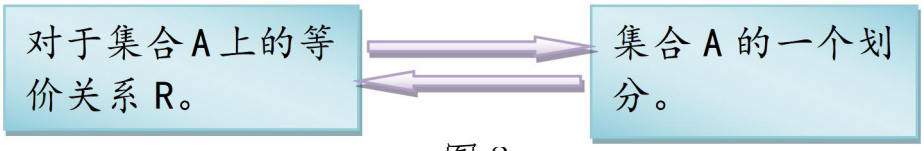
则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块。

本环节设计目的	备 注
1. 检查学生的自学情况以及对基本概念的理解情况。 2. 培养学生的自学能力和语言表达能力。	 学生讲解

教学环节三：课堂练习（5 分钟）

主要内容	教学活动
例 2：对于给定的集合 A={1,2,3,4,5,6}，A 上的关系 R 如下： R={<1,2>,<2,1>,<3,4>,<4,3>,<5,6>,<6,5>} ∪ I_A 快速判断 R 是否是 A 上的等价关系？ **例 3：**求出例 2 中的等价类有哪些？ **解：**根据等价关系的定义，例 2 中每个元素的等价类为： [1] = [2] = {1,2} [3] = [4] = {3,4} [5] = [6] = {5,6} **例 4：**求出例 2 中集合 A 关于 R 的商集。 **解：**分析例 2，可写出对应的商集为： A/R={{1,2},{3,4},{5,6}} **例 5：**设 A＝{a,b,c,d},给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下：	**教师活动：** 教师布置课堂练习：例 2~例 5，并将完成情况发送至超星学习通平台。 **学生活动：** 完成教师布置的课堂练习：例 2~例 5

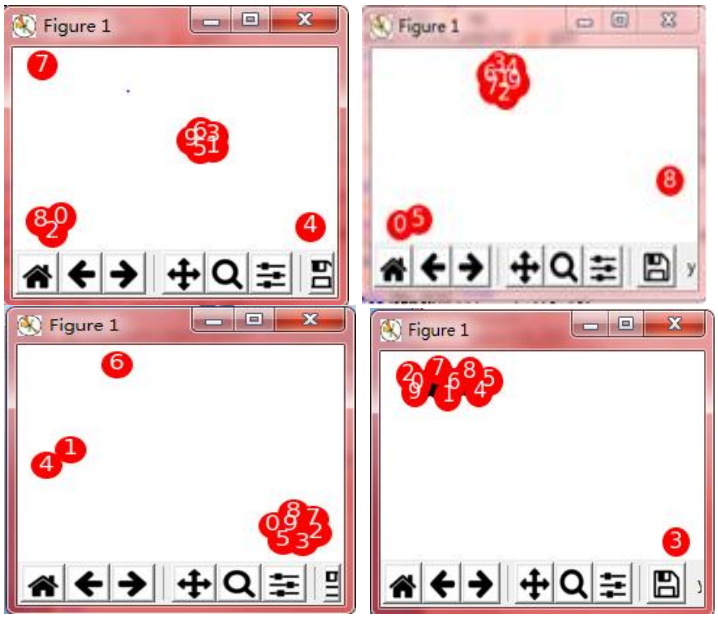
$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$ $\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ $\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$ $\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$ $\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$ $\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$ 判断$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$中哪个集合是一个划分？ **解：**根据划分的定义可知，π_1,π_2是A的一个划分。	
本环节设计目的	**备 注**
1.学生能够快速判断出给定关系是否是一个等价关系，并且能够快速写出给定等价关系所对应的等价类、商集。 2.学生能够快速判断出给定集合是否是某个集合的一个划分。 3.培养学生的知识表达能力。	知识表达能力
教学环节四：互动学习（10分钟）	
主要内容	**教学活动**
1.根据例1所对的等价关系的关系图，可以分析出等价关系有如下特点： ①图1所对的模3等价关系对应的关系图是三个独立的部分。	**教师活动：** 与学生互动完成下面的问题： 1.例1中的等价关系所对的关系图具

②每个部分中的结点之间都有边，也就是结点之间都有关系。 ③每个部分的节点都有一样的性质,即:节点 1、4、7 除以 3 的余数都是 1，节点 2、5、8 除以 3 的余数都是 2，节点 3、6 除以 3 的余数都是 0。 **2. 等价类的性质** 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 (1)∀x∈A ，[x]是 A 的非空子集。 (2)∀x,y∈A ,如果<x,y>∈R,则[x]=[y]。 (3)∀x,y∈A ,如果<x,y>∈R,则[x]与[y]不交。 (4)∪{[x]|x∈A}=A **3. 等价关系与划分的关系** 集合上的一个等价关系决定了集合的一个分类。反过来，集合的一个分类也决定了集合上的一个等价关系。如下图 2 所示：  图 2	有什么特点 2. 思考等价类有哪些性质？ 3. 思考等价关系与划分的关系。 **学生活动：** 根据教师提出的问题，和教师一起积极思考。
本环节设计目的	**备 注**
1. 学生能够判断出等价关系具有哪些特点，以及能够总结出等价类具有的性质。 2. 学生能够认识到等价关系其实就是划分。 3. 培养学生观察问题的能力、归纳总结能力。	观察能力 归纳总结能力

教学环节五：讨论研究（5 分钟）

主要内容	教学活动

借助 Python 语言构造等价关系
为了体现等价关系与划分之间的关系，现使用 Python 语言构造给定集合上的等价关系，并画出等价关系所对的关系图，观察等价关系所对的关系图是不是指定集合的一个划分。
使用 Python 代码构造等价关系，主要代码如下：
`def drawgraph(R):`
`  G=nx.DiGraph( )`
`  G.add_edges_from(R)`
`  nx.draw(G,node_size=200,node_color='r',with_labels=True,font_color='w')`
`  plt.show()`
`  return`
`def  main(m,n):`
`  global X,R0,R,tv`
`  X=range(m)`
`  R0=createrelation(m,n)`
`  R=t(X,s(X,r(X,R0)))`
`  tv=isequivalence(X,R)`
`  R=list(R)`
`  drawgraph(R)`
`return tv`
如上代码的功能是：从 0,1,2…m-1 这些数中随机生成 n 个有序对构成二元关系 R_0，然后在 R_0 的基础上使用自反闭包、对称闭包和传递闭包的公式构造出等价关系 R，然后调用 drawgraph(R) 函数生成对应的关系图。如图 3 中的四幅图是随机构造出的
	教师活动：
	和学生一起讨论下面两个问题：
	1. 讨论左面的代码是如何构造等价关系的？
	2. 讨论左面的思考问题。
	
	学生活动：
	1. 和教师一起讨论并思考给出的代码。
	2. 思考给出的思考问题问题。

四个等价关系，从图中可以看到，等价关系对应的关系图确实是几个独立的部分。  图 3 思考： 已知集合 A={1,2,3}，能否写出 A 上的所有等价关系？	
本环节设计目的	**备 注**
1. 培养学生阅读代码的能力。 2. 引导学生能够使用 Python 代码构造不同的等价关系。 3. 学生能够深刻理解等价关系其实就是一个划分。 4. 培养学生的编程能力和计算思维能力。	动手能力

教学环节六：等价关系的具体应用（10 分钟）

主要内容	教学活动

例 6：现分析课前提出的问题，并找到其中蕴含的等价关系。

表 1 “学习强国”导出基本信息

姓名	性别	年龄	党派	职业
王吉荣 1	女	50	中国共产党	高校教师
张祥德 2	男	28	九三学社	工程师
王生安 3	男	34	中国共产党	高校教师
刘　玉 4	女	26	中国农工民主党	高校教师
华璐玉 5	女	38	中国民主同盟	工程师
古军同 6	男	57	中国民主同盟	设计师
林必力 7	女	25	九三学社	设计师

表 1 中用户的基本信息有性别、年龄、党派、职业，分别将其用符号 a_1、a_2、a_3、a_4 表示。因此可以建立以下等价关系：

在属性 a_3 上建立等价关系，表示具有相同性别的用户的有序对

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 7,7\rangle,$
$\langle 2,7\rangle,\langle 7,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 6,5\rangle,$
$\langle 5,7\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

由等价关系 R_3 可得到四种等价类：$\{1,3\},\{2,7\},\{5,6\},\{4\}$ 即为对集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 在属性 a_3 下的一个划分，也就是说在这种划分下用

教师活动：
引导学生分组讨论例 5 和例 6 两个问题。

学生活动：
分小组讨论教师布置的两个问题。

户 1、3 是无差别的（中国共产党），2、7 是无差别的（九三学社），5、6 是无差别的（中国民主同盟），同理还可以在属性 a_1、a_2、a_4 上建立等价关系。 **例 7：**学习强国 app 是以习主席新时代中国特色社会主义思想和党的十九大精神为主要内容的一款提供优质学习资源的软件。假设在这款软件的开发过程中，登陆模块中密码的设置规则需满足以下三个条件： ①密码长度要控制在 8~12 个字符之间。 ②密码中必须包含数字字符。 ③密码中必须包含字母字符。 请你采用等价类测试法设计有效等价类测试用例和无效等价类测试用例。	
本环节设计目的	**备 注**
1. 检查学生是否能够找出问题中的等价关系。 2. 学生能够使用等价类来解决具体的问题。 3. 培养学生对问题的识别能力、分析问题的能力以及解决实际问题的能力。 4. 引导学生积极学习学习强国中的各种优质资源，对学生进行思想教育。	应用能力
教学环节七：本课小结及反思（1 分钟）	
主要内容	**设计目的**
研究等价关系的目的在于将集合中的元素进行分类，选取每类的代表元素来降低问题的复杂度。	通过小结帮助学生归纳整理本节课

本节课主要学习了以下内容： 1. 等价关系、等价类、商集和划分的概念 2. 等价关系与划分之间的关系 3. 等价关系在计算机学科以及生活中的一些应用，比如：在软件测试时，可利用等价类来选择测试用例；在日常生活中，等价关系在班级管理中的应用。 大家课后继续思考等价关系还在哪些具体问题上有所应用。	所学的内容，使学生理解等价关系在软件测试和班级管理中的具体应用，最后留下课后反思问题，鼓励学生课后继续学习。

课后作业及延伸

主要内容	设计目的
一、利用本节课所讲内容，完成下面的问题。 某城市电话号码由地区码-区内编码两部分组成，组成规则如下表 1 所示，地区码：空白或者三位数字；区内编码：非 0 和 1 开头的四位数字。试按照编码规则校验电话号码的合法性，采用等价类测试法设计有效等价类测试用例和无效等价类测试用例。	1. 通过第一题检查学生能否使用等价类测试法找出所有的测试用例。 2. 对于一个实际问题训练学生使用等价关系的知识去解决。 3. 通过课外阅读参考文献，帮助学生对本节所学的等价关系的知识进行延伸，鼓励学生寻找等价

表 2 电话号码组成规则的等价类表

输入条件	有效等价类	无效等价类
地区码	①空白 ②三位数字	④有非数字字符 ⑤少于三位数字 ⑥多于三位数字
区内编码	③2000 到 9999 四位数字	⑦有非数字字符 ⑧起始数字为 0 ⑨起始数字为 1 ⑩少于四位数字 ⑪多于四位数字

二、本节课后引导学生阅读以下参考文献，并分析和思考等价关系在哪些具体问题中有所应用？ 1.李克清,周贤善.等价关系在计算机科学中的应用研究[J]. 长江大学学报,2020,1(02):33-36. 2.梁洪亮.浅谈等价关系的应用[J].高等数学研究, 2021,7(04):46-49. 3.等价关系及其应用 - 百度文库 4.毕业论文 浅谈等价关系在大学数学一些课程中的应用 5.案例驱动的“离散数学”教学研究 - 科学猫(scicat.cn)	关系的实际应用案例。 4.学生通过学习指定的参考文献，培养自身的自学能力和创新能力。